



گزینه ۱

۱

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(0) = 1$$

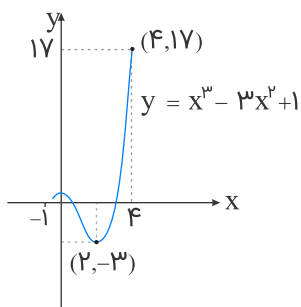
$$f(2) = -3$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$f(4) = 17$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع در نقطه $(2, -3)$ رخ می‌دهد.

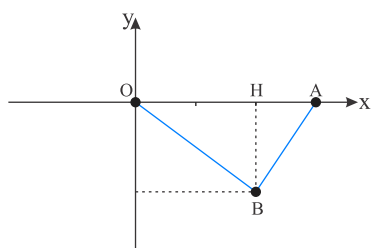
$$a \times b = 2(-3) = -6$$



$$y' = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}}$$

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{-4} \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$



واضح است که کوتاه‌ترین ارتفاع، نظیر بزرگ‌ترین ضلع است.
پس ارتفاع نظیر ضلع OA یعنی عرض نقطه B با علامت مثبت، ارتفاع موردنظر خواهد بود.

ریشه‌های f' را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

نیازی به جدول تعیین علامت برای f' نیست. حتماً این دو نقطه $A(-1, 5)$ و $B(3, -27)$ اکسترمم‌های نسبی تابع هستند. معادله خط گذرنده از نقاط A و B را می‌نویسیم:

$$m = \frac{5 - (-27)}{-1 - 3} = \frac{32}{-4} = -8$$

$$y - 5 = -8(x + 1) \Rightarrow -8x - 3$$

↓
عرض از مبدأ

ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم، پیوستگی و مشتق‌پذیری f را در $x = 1$ که عدد تغییر ضابطه است کنترل می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{x}{3} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x - \frac{4}{3} & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 - \frac{x}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \ell_1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - \frac{4}{3} = 1 + 1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = \ell_2 \end{cases}$$

$\ell_2 = \ell_1 = f(1) = \frac{2}{3}$ پس تابع f در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - \frac{1}{3} & ; 0 \leq x < 1 \\ 2x + 1 & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\ f'(1^+) = 3 \end{cases}$$

$f'(1^-) \neq f'(1^+)$ پس f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست و $x = 1$ بحرانی است.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in (0, 1) \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin (1, 2) \end{cases}$$

پس $x = \frac{1}{3}$ اکسترمم تابع است و مقدار تابع در این نقطه برابر است با: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27}$
همچنین مقدار تابع در $x = 1$ برابر $\frac{2}{3}$ است.

حال مقدار تابع را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه می‌یابیم:

$$f(0) = 0, \quad f(2) = \frac{14}{3}$$

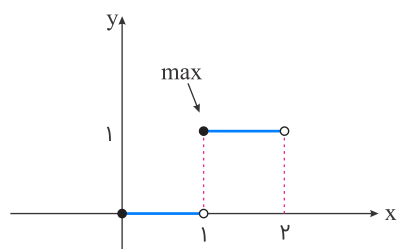
$$\text{پس } M = \frac{14}{3} \text{ و } m = -\frac{2}{27} \text{، بنابراین } \frac{M}{m} = \frac{\frac{14}{3}}{-\frac{2}{27}} = -63.$$

سعی می‌کنیم نمودار تابع را اطراف $x = 1$ رسم کنیم:

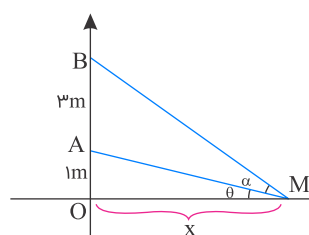
$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} [x]\right)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} (0)\right) = \sin 0 = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} (1)\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$



تابع در $x = 1$ پیوسته نیست در نتیجه مشتق‌پذیر هم نمی‌باشد. می‌دانیم در نسبت مثلثاتی سینوس، ماکزیمم برابر ۱ است، پس در $x = 1$ تابع ماکزیمم مطلق دارد.



اگر شیب پاره‌خط AM و BM را به ترتیب m_1 و m_2 در نظر بگیریم، داریم:

$$m_1 = -\tan \theta = \frac{-OA}{OM} = \frac{-1}{x}$$

$$m_2 = -\tan(\alpha + \theta) = \frac{-OB}{OM} = \frac{-3}{x}$$

باتوجه به زاویه α ، داریم:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{x} - \left(-\frac{3}{x}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{3}{x}\right)} \right| \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \left| \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} \right| = \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{2}{x + \frac{3}{x}} \quad (*) \end{aligned}$$

می‌دانیم با افزایش α ، $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد و چون تابع α در بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ اکیداً صعودی است، حداکثر α بیشترین مقدار $\tan \alpha$ را تعیین می‌کند. حال باتوجه به رابطه $(*)$ ، برای ماکزیم کردن $\tan \alpha$ باتوجه به ثابت بودن صورت کافی است عبارت مخرج را مینیم کنیم. بنابراین:

$$\begin{aligned} y &= x + \frac{3}{x} \\ y' &= 1 - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق.ق } x = \sqrt{3} \\ \text{غ.ق.ق } x = -\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین نقطه M باید یک متر به سمت چپ جابه‌جا شود.

نکته: چون حاصلضرب x و $\frac{3}{x}$ برابر مقداری ثابت است $\left(x \times \frac{3}{x} = 3\right)$ ، مجموع این دو عبارت زمانی مینیم می‌شود که هر دو با هم برابر باشد.

$$x = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق.ق } x = \sqrt{3} \\ \text{غ.ق.ق } x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

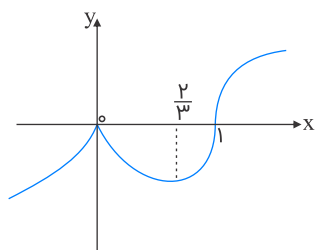
در ریشه‌های زیر رادیکال تابع مشتق‌پذیر نیست و نقاط بحرانی دارد؛ پس $x = 0$ و $x = 1$ بحرانی هستند.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}} = \frac{x(3x - 2)}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}}$$

در $x = \frac{2}{3}$ هم که مشتق صفر می‌شود و نقطه بحرانی است.

پس نقاط بحرانی تابع $x = 0$ ، $x = 1$ و $x = \frac{2}{3}$ هستند.

نمودار تابع به صورت زیر است:



$$\pi r^2 h = 1000 \text{ (cm}^3\text{)} \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 \Rightarrow S = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$$

$$\Rightarrow S' = -\frac{2000}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow \frac{2000}{r^2} = 4\pi r \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \Rightarrow r = 5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

هر دو ضابطه، در دامنه‌شان پیوسته هستند. همچنین تابع در $x = 0$ پیوسته است، بنابراین تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است. حال برای مشتق تابع f داریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} & ; x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ندارد؛ زیرا مشتق چپ و مشتق راست در این نقطه برابر نیستند. همچنین در $x = -1$ نیز خط مماس بر نمودار قائم خواهد بود. بنابراین در این نقطه نیز مشتق وجود ندارد.

عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع برابر با $\frac{1}{4}$ است. با مشتق‌گیری از تابع طول آن را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x^2 + a) - 2x(x)}{(x^2 + a)^2} = \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

طول ماکزیمم نسبی تابع باتوجه‌به نمودار آن برابر با $x = \sqrt{a}$ می‌شود. حالا $f(\sqrt{a})$ را برابر با $\frac{1}{4}$ قرار می‌دهیم:

$$f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{a + a} = \frac{\sqrt{a}}{2a} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

چون نمودار تابع $f'(x)$ داده شده است، پس کافی است برای تعیین یکنوایی f ، تابع f' را تعیین علامت کنیم. f' برای $x > 0$ بالای محور x ‌ها و برای $x < 0$ زیر محور x ‌ها و در $x = 0$ با محور x ‌ها برخورد کرده است؛ پس جدول تعیین علامت f' به‌صورت زیر است:

درنتیجه تابع f در فاصلهٔ $(-\infty, 0)$ نزولی اکید است.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$

مختصات نقطه‌ای از نمودار تابع f را که از خط $y = x - 1$ کمترین فاصله را دارد، $(\alpha, f(\alpha))$ در نظر می‌گیریم.

$$d(\alpha) = \frac{|f(\alpha) - \alpha + 1|}{\sqrt{2}} : \text{فاصله نقطه مورد نظر از خط}$$

d باید کمترین مقدار باشد. حال چون f و خط $y = x - 1$ نقطه برخوردی ندارند (باتوجه به گزینه‌ها)، پیدا کردن کمترین مقدار d معادل است با پیدا کردن کمترین مقدار تابع $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha + 1$ (صرف نظر از علامت آن). بنابراین داریم:

$$g'(\alpha) = f'(\alpha) - 1 = 4\alpha^3 - 3\alpha - 1 = (\alpha - 1)(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)$$

$$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \alpha = -\frac{1}{4}$$

x		$-\frac{1}{4}$		1		
σ'		-	o	-	o	+
σ						

min

با تعیین علامت g' درمی‌یابیم که $\alpha = 1$ طول نقطه مینیمم تابع g است.

$$\Rightarrow d_{\min} = d(1) = \frac{|f(1) - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

f' را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

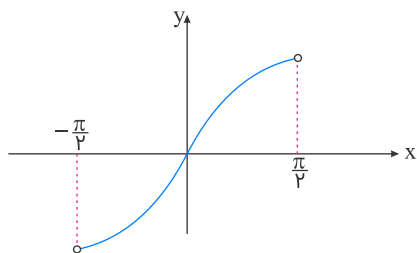
نامعادله $f' \leq 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

پس تابع f روی بازه $[-\frac{1}{3}, 1]$ اکیداً نزولی است و حداکثر $b - a$ برابر است با:

$$1 - (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

نمودار مشتق تابع $f(x)$ را در فاصله $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ رسم کرده‌ایم:
باتوجه به نمودار می‌توانیم $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم:



x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		min	

بنابراین $f(x)$ در $x = 0$ مینیمم نسبی دارد.

این تابع، یک تابع درجه دوم کسینوسی است.

$$y = (2 \cos x - 1)(1 + \cos x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

در این مدل توابع $(a \cos^2 x + b \cos x + c)$ کافی است که سه عدد ۱ و -۱ و $\frac{-b}{2a}$ (به شرطی که $1 < \left| \frac{-b}{2a} \right|$) را به جای $\cos x$ قرار دهیم و مقادیر به دست آمده را مقایسه کنیم:

$$\cos x = 1 \Rightarrow y = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow y = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = 2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1$$

پس $\max(y) = 2$ و $\min(y) = -1$ می‌باشد.

$$\max(y) + \min(y) = 2 - 1 = 1$$

$$A = \frac{1}{(\sin x - 1)^2 + 4}$$

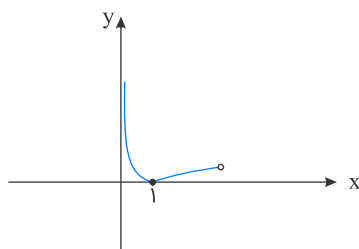
می‌دانیم $-1 \leq \sin x \leq 1$ است، پس:

$$-2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4$$

حداکثر مقدار A زمانی رخ می‌دهد که $(\sin x - 1)^2$ به حداقل خود یعنی صفر برسد. پس:

$$\max(A) = \frac{1}{0 + 4} = \frac{1}{4}$$

تابع $|\log x|$ در فاصله $(0, 2)$ فقط یک نقطه بحرانی $x = 1$ دارد که در این نقطه تابع شکستگی دارد و مشتق چپ و راست آن نابرابر است.



تابع $[x]$ در تمام نقاط بازه $(2, 5)$ بحرانی دارد، زیرا یا مشتق صفر است و یا وجود ندارد. تابع $\frac{1}{3}x^3 - 9x$ فقط ریشه‌های مشتقش بحرانی است.

$$y' = x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$x = \pm 3$ در فاصله $(5, +\infty)$ قرار ندارد، پس این ضابطه فاقد نقطه بحرانی است. حال به بررسی نقاط مرزی تابع می‌پردازیم.

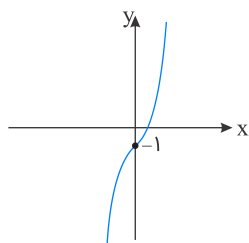
$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \log 2$$

$$f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \frac{125}{3} - 45, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$$

پس تابع در $x = 2$ و $x = 5$ ناپیوسته و در نتیجه بحرانی است. در مجموع نقاط بحرانی $\{1\} \cup [2, 5]$ می‌باشد.

اگر $P(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، در این صورت نقاط بحرانی تابع $|P(x)|$ از حل معادلات $P(x) = 0$ و $P'(x) = 0$ به دست می‌آید.

الف) حل معادله $x^3 + x - 1 = 0$: فرض می‌کنیم $g(x) = x^3 + x - 1$ باشد. چون $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ می‌باشد، پس g اکیداً صعودی است و $g(0) < 0$ است پس نمودار آن به صورت زیر است:



پس $g(x) = 0$ یک ریشه مثبت دارد.

ب) حل معادله $g'(x) = 0$:

ریشه حقیقی ندارد $\Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 = 0$

پس تابع $f(x)$ فقط یک نقطه بحرانی دارد که آن هم طول مثبت دارد.

باید $f'(1) = 0$ و $f(1) = 3$ باشد:

$$f(x) = x^3 + ax + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 + a + b = 3 \Rightarrow a + b = 2 \\ f'(1) = 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

فرض کنید طول ضلع مربع برابر a است. در این صورت می‌دانیم $2x + \ell = a$ است.

$$V = \ell^2 x = \ell^2 \left(\frac{a - \ell}{2} \right) = \frac{1}{2} (a\ell^2 - \ell^3)$$

در صورتی حجم ماکزیمم است که مشتق آن صفر باشد.

$$V' = \frac{1}{2} (2a\ell - 3\ell^2) = 0 \Rightarrow \ell (2a - 3\ell) = 0 \Rightarrow \ell = \frac{2a}{3}$$

$$\max(V) = 2000 = \frac{1}{2} (a\ell^2 - \ell^3) \xrightarrow{\ell = \frac{2a}{3}} 4000 = a \left(\frac{2a}{3} \right)^2 - \left(\frac{2a}{3} \right)^3$$

$$4000 = a \left(\frac{4a^2}{9} \right) - \left(\frac{8a^3}{27} \right) = \frac{12a^3 - 8a^3}{27} = \frac{4a^3}{27} = 4000 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = 4000$$

$$\Rightarrow a^3 = 1000 \times 27 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1000 \times 27} = 10 \times 3 = 30$$